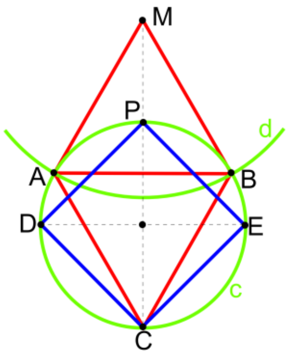
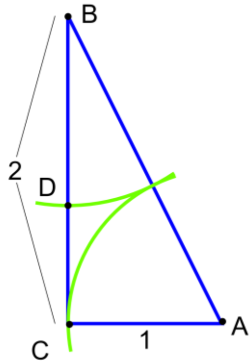
Uitwerking puzzel 92-3
Meetkunde

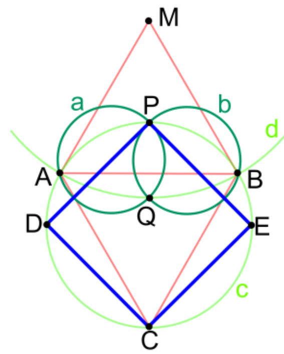
Wobien Doyer
Lieke de Rooij



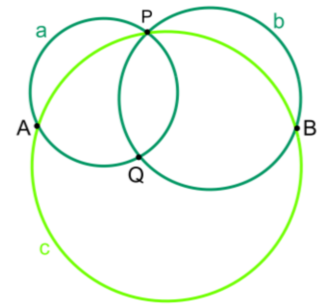
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4

We gaan eerst op een wat onbekende manier een lijnstuk verdelen volgens de gulden snede. En dan bouwen we die figuur uit tot een bijzonder geval van een te bewijzen meetkunde stelling van opgave 3.

We tekenen twee gelijkzijdige driehoeken ABC en ABM. Verder de omgeschreven cirkel c van ABC en de cirkel d met middelpunt M door A en B. En we tekenen het vierkant $PDCE$ op cirkel c.
Zie figuur 1.

Het zal u bekend zijn dat de eenvoudigste manier om een lijnstuk te verdelen volgens de gulden snede is door een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 1 en 2 te tekenen en vervolgens een stuk van lengte 1 op de schuine zijde af te passen en vervolgens het resterende deel af te passen op de zijde van lengte 2. Zie figuur 2.
De hoekpunten van zo'n driehoek zijn ook te vinden in figuur 1, maar er is ook een lijnstuk dat daar al volgens de gulden snede is verdeeld.

Opgave 1a: Welke drie punten vormen een driehoek zoals in figuur 2?
Laat O het middelpunt zijn van cirkel c met straal 1. Dan is de hoogte van de gelijkzijdige driehoeken $3/2$, en dus $CO = OP = PM = 1$. en dus $OM = 2OE$. Driehoek OEM is dus een driehoek zoals in figuur 2.
Enkele inzenders zagen er nog een: lijnstuk AB verdeelt PE in twee gelijke stukken. Als F het snijpunt is van AB en PE is FPD dus ook zo'n driehoek.

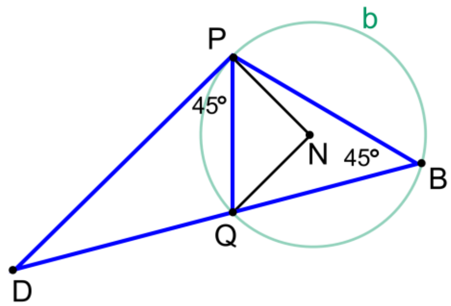
Opgave 1b: Welk lijnstuk in de figuur is al verdeeld volgens de gulden snede? Bewijs dat.
De meeste inzenders kozen hier voor een analytische oplossing, maar er waren ook oplossers die de cosinusregel gebruikten. We geven hier een analytische oplossing:
Laat O de oorsprong zijn van een orthogonaal assenstelsel met $E(1,0)$ en $P(0,1)$. We bepalen de x-coördinaat van het snijpunt G van PE en de cirkel d.
PE is de lijn $y = 1 - x$ en d de cirkel $x^2 + (y-2)^2 = 3$. Invullen van y levert $x^2 + (-x - 1)^2 = 3$ of $x^2 + x = 1$, met als positieve oplossing $x = \left(\sqrt{5} - 1\right)/2$ en dat is de guldensnedeverhouding.
De x-coördinaat van G is dus $(\sqrt{5} - 1)/2$. De loodlijn van G op de x-as verdeelt OE volgens de gulden snede en dus wordt ook lijnstuk PE door G verdeeld volgens de gulden snede.

De volgende opgaven staan geheel los van opgave 1, hoewel we wel beginnen met dezelfde figuur.

Voor opgave 2 tekenen we ook nog het snijpunt Q van MC (niet getekend) en cirkel d en de cirkels a en b respectievelijk door APQ en BPQ. Zie figuur 3. Dan is er een aantal mooie eigenschappen te ontdekken.

Opgave 2a: Eerst vragen we u te bewijzen dat B, Q en D op een rechte lijn liggen.
Ook dit kan op verschillende manieren. We kiezen hier voor een synthetische aanpak ontleend aan de methode van Jan Guichelaar. In cirkel c is $\angle ABD$ een omtrekshoek op boog AD en $\angle AOD$ middelpuntshoek op dezelfde boog. In cirkel d is $\angle ABQ$ is een omtrekshoek op boog AQ en $\angle AMQ$ een middelpuntshoek op dezelfde boog. Dus $\angle ABD$ is de helft van $\angle AOD$ en $\angle ABQ$ is de helft van $\angle AMQ$. $\angle AOD = \angle AMQ = 30°$ Dus is ook $\angle ABQ = \angle ABD (= 15°)$ en B, Q en D liggen op een rechte lijn.

Opgave 2b: Bewijs nu dat DP raaklijn is van cirkel b en dus ook EP raaklijn van a, met als gevolg dat a en b elkaar loodrecht snijden.



figuur 5

Dit kan analytisch met nogal wat rekenwerk. Sommige inzenders gebruikten de machtstelling en lieten zien dat $DP^2 = DQ \cdot DB$. Gerard Bouwhuis deed het met hoeken met nog minder rekenwerk: In figuur 3 zien we: $\angle DBP$ staat in cirkel c op boog DP en is dus 45°. $\angle PDQ$ is natuurlijk ook 45°(vanwege het vierkant). In figuur 5 zien we de driehoek DBP en PQ terug met de omgeschreven cirkel b van QBP. N is het middelpunt van b is er ingetekend met de stralen NP en NQ. Omdat $\angle QBP = 45°$ en in cirkel b middelpuntshoek $\angle PNQ$ op dezelfde boog PQ is, is $\angle PNQ$ recht, en ΔPNQ is dus gelijkbenig en rechthoekig, en dus is $\angle NPQ$, net als $\angle DPQ$ 45°. Straal NP staat dus loodrecht op DP, dus DP is raaklijn van b.

Opgave 2c: Onder welke hoek snijden cirkels c en d elkaar? Licht uw antwoord toe.
OB maakt een hoek van 30° met AB en dus een hoek van 90° met MB. Omdat OB een straal is van cirkel c is MB dan een raaklijn van cirkel c. Maar MB is een straal van cirkel d, dus de hoek tussen beide cirkels is 90°.

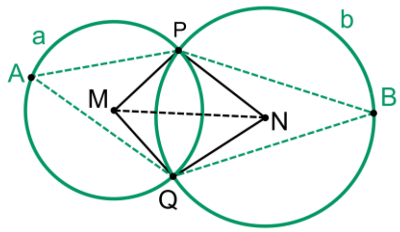
Opmerking: Onder de hoek waaronder twee cirkels elkaar snijden verstaan we de hoek tussen de raaklijnen in een snijpunt van die cirkels. We kiezen daarvoor altijd de kleinste hoek, dus ≤ 90°.

Voor opgave 3 hebben we weer een cirkel c met daarop de nu willekeurig gekozen punten A en B. Punt C en cirkel d hebben we niet nodig. Punt P is nu een variabel punt op c. Verder is Q nu een willekeurig punt, op, in of buiten cirkel c. Cirkels a en b zijn weer omgeschreven cirkels van respectievelijk driehoeken APQ en BPQ. Zie figuur 4.

Stelling 1:
De hoek waaronder cirkels a en b elkaar snijden is onafhankelijk van de plaats van P op c.
We kiezen dus een punt Q en cirkel c met A en B vast. En een beweeglijk punt P op c.

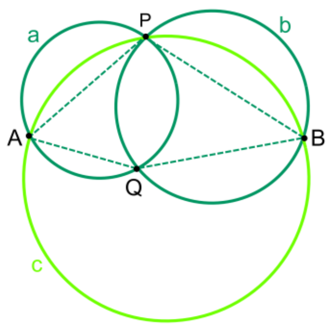
Opgave 3a: Als Q op cirkel c ligt is de stelling eigenlijk triviaal. Leg dat uit.
Zoals alle inzenders zagen liggen A, B, P en Q dan allemaal op cirkel c. De cirkels a en b vallen dus samen met c en maken altijd, onafhankelijk van de plaats van P, een hoek van 0° met elkaar.

Voor het bewijs van stelling 1 maakt het in principe niet veel uit of Q aan dezelfde kant van AB ligt als P, en of Q binnen of buiten c ligt. U mag dus zelf kiezen waar u Q tekent, maar wij hebben een voorbeeld gegeven in figuur 3.



figuur 6

Opgave 3b: Bewijs stelling 1.
Zie figuur 6: Cirkel a met middelpunt M en b met middelpunt N snijden elkaar in P en Q, A ligt op a en B op b.
De raaklijn aan a in P maakt een hoek van 90° met MP en de raaklijn aan b in P maakt een hoek van 90° met NP. Dat betekent dat de hoek die de cirkels a en b met elkaar maken gelijk is aan $\angle MPN$ (als $\angle MPN<90°$) of aan het supplement ervan (als $\angle MPN>90°$)
Het supplement van $\angle MPN$ is gelijk aan $\angle NMP + \angle MNP$ (de drie hoeken zijn de hoeken van ΔNMP) En omdat $\angle NMP$ gelijk is aan de helft van de middelpuntshoek $\angle QMP$ geldt $\angle NMP = \angle QAP$ en evenzo: $\angle MNP = \angle QBP$. De hoek waaronder de cirkels a en b elkaar snijden is dus gelijk aan $\angle QAP + \angle QBP$ of aan het supplement daarvan.

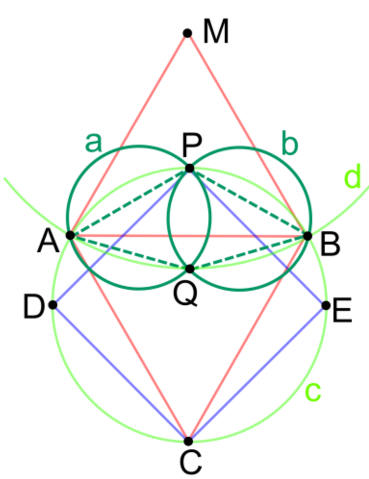


figuur 7

Zie nu figuur 7 (dit is figuur 4 waarin de vierhoek $AQBP$ getekend is). We weten nu dat de hoek tussen de cirkels a en b gelijk is aan (het supplement van) de som van de hoeken A en B in de vierhoek.
De hoeken P en Q liggen vast: Q omdat A, B en Q vaste punten zijn en P (tenminste als P op de bovenste boog AB ligt) omdat hij altijd op dezelfde boog staat in cirkel c.
De som van de hoeken A en B ligt daarmee ook vast, en dus ook de hoek tussen de cirkels a en b.

Als P op de onderste cirkelboog BA op c ligt 'klapt' de vierhoek $AQBP$ 'om', met het gevolg dat de waarde van $\angle A + \angle B$ het supplement wordt van de eerdere waarde. De hoek tussen de cirkels blijft dan dus gelijk. Daarmee is de stelling bewezen.

Met behulp van deze resultaten kunnen we opgave 2b veel directer vinden dan we hierboven hebben gedaan. We bewijzen eerst dat de cirkels a en b loodrecht op elkaar staan en dan laten we zien dat DP raaklijn is van cirkel b, andersom dus dan in opgave 2a en 2b.



figuur 8

Figuur 8 is figuur 3 waarin de vierhoek $AQBP$ is ingetekend. We kunnen de situatie uit figuur 6 hier op twee manieren in terugvinden: de vierhoek $AQBP$ met ofwel de cirkels a en b, ofwel de cirkels c en d. Het ene paar cirkels snijdt elkaar dus onder een hoek gelijk aan de som van het ene paar overstaande hoeken in de vierhoek, het andere paar onder een hoek gelijk aan de som van het andere paar overstaande hoeken van de vierhoek. Die twee sommen zijn natuurlijk samen 360°, en als het om 2 snijdende lijnen gaat is een hoek x dezelfde als een hoek $360° - x$. De hoek tussen de cirkels a en b is dus dezelfde als die tussen de cirkels c en d.
In opgave 2c vonden we (zonder 2a en 2b te gebruiken) dat de hoek tussen de cirkels c en d 90° is. Dus is de hoek tussen de cirkels a en b ook 90°.
Omdat ook DP en EP loodrecht op elkaar staan volgt nu uit de symmetrie van de figuur direct dat AP een raaklijn is van cirkel b en EP van cirkel a, wat we in opgave 2a en 2b met heel wat meer rekenwerk hebben bewezen.